Exercice 1. La fonction dilogarithme (*d'après CCINP PC 2023*)
Dans cet exercice, on commence par définir la fonction dilogarithme dans la première partie, puis on étudie quelques-unes de ses propriétés dans les parties suivantes.
On admet et on pourra utiliser librement l'égalité :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Partie I - Existence et premières propriétés de la fonction dilogarithme

Dans cette partie, on considère la fonction $f\colon]0\,;+\infty[\times]-\infty\,;1] \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (t,x) \in]0\,;+\infty[\times]-\infty\,;1], \quad f(t,x) = \frac{t}{\mathrm{e}^t - x}.$$

Q1. Justifier que la fonction f est bien définie sur $]0\,;+\infty[\times]-\infty\,;1]$.

Soient $(t,x) \in]0\,;+\infty[\times]-\infty\,;1]$. Comme $t > 0$, on a $\mathrm{e}^t > 1$, d'où $\mathrm{e}^t - x > 1 - x > 0$ car $x < 1$. En particulier, $\boxed{\text{on a toujours } \mathrm{e}^t - x \neq 0}$ donc f est bien définie sur $]0\,;+\infty[\times]-\infty\,;1]$.

Q2. Montrer que la fonction $t \mapsto f(t,1)$ est intégrable sur $]0\,;+\infty[$.

D'abord, d'après la question précédente, $t \mapsto f(t,1) = \dfrac{t}{\mathrm{e}^t - 1}$ est bien définie sur $]0\,;+\infty[$ et y est $\boxed{\text{continue}}$ comme quotient de fonctions usuelles dont le dénominateur ne s'annule pas.

- On a $f(t,1) = \dfrac{t}{\mathrm{e}^t - 1} \underset{t\to 0}{\overset{\mathrm{DL}}{=}} \dfrac{t}{1 + t + o(t) - 1} \underset{t\to 0}{\sim} 1$ donc f est prolongeable par continuité en 0, d'où $\boxed{t \mapsto f(t,1) \text{ intégrable sur } [0\,;1]}$.
- Par croissances comparées, on a $f(t,1) \underset{+\infty}{=} o(1/t^2)$. Comme $t \mapsto 1/t^2$ est intégrable sur $[1\,;+\infty[$ (intégrale de Riemann avec $2 > 1$), par comparaison, $\boxed{t \mapsto f(t,1) \text{ est intégrable sur } [1\,;+\infty[}$.

Bilan : $t \mapsto f(t,1)$ est intégrable sur $]0\,;+\infty[$.

Q3. Soit $x \in]-\infty\,;1]$. En comparant les fonctions $t \mapsto f(t,x)$ et $t \mapsto f(t,1)$, montrer que $t \mapsto f(t,x)$ est intégrable sur $]0\,;+\infty[$.

Soit $t > 0$. Comme $x \leqslant 1$, on a $-x \geqslant -1$, d'où $\mathrm{e}^t - x \geqslant \mathrm{e}^t - 1$. En passant à l'inverse et en multipliant par $t > 0$, on obtient $\boxed{f(t,x) \leqslant f(t,1)}$. De plus, d'après **Q1**, $f(t,x) \geqslant 0$.
Or, d'après la question précédente, $t \mapsto f(t,1)$ est intégrable sur $]0\,;+\infty[$ donc par $\boxed{\text{comparaison}}$ de $\boxed{\text{fonctions positives}}$, $t \mapsto f(t,x)$ est intégrable sur $]0\,;+\infty[$.

D'après les résultats précédents, on peut définir la fonction $L\colon]-\infty\,;1] \to \mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in]-\infty\,;1], \quad L(x) = x \int_0^{+\infty} f(t,x)\,\mathrm{d}t.$$

Cette dernière est appelée fonction dilogarithme.

Q4. Montrer que la fonction L est continue sur $]-\infty\,;1]$.

Appliquons le $\boxed{\text{théorème de continuité d'une intégrale à paramètre}}$ à $x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t,x)\,\mathrm{d}t$.

- Pour tout $t \in]0\,;+\infty[$, $x \mapsto f(t,x)$ est continue sur $]-\infty\,;1]$ (cf **Q2**).
- Pour tout $x \in]-\infty\,;1]$, $t \mapsto f(t,x)$ est continue (par morceaux) sur $]0\,;+\infty[$.

– Pour tout $x \in]-\infty\,;1]$, $t \in]0\,;+\infty[$, d'après la question précédente, $0 < f(t,x) \leqslant f(t,1) = \varphi(t)$. On a φ indépendante de x et intégrable sur $]0\,;+\infty[$ par **Q2**.

Ainsi $x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t,x)\,\mathrm{d}t$ est continue sur $]-\infty\,;1]$. De plus, $x \mapsto x$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Finalement, par produit de fonctions continues, $\boxed{L \text{ est continue sur }]-\infty\,;1]}$.

Partie II - Développement en série

Dans cette partie, on montre que la fonction L peut s'écrire comme la somme d'une série. On considère un nombre réel $x \in [-1\,;1]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction $s_n\colon]0\,;+\infty[\to \mathbb{R}$ par

$$\forall t \in]0,+\infty[, \quad s_n(t) = t\,\mathrm{e}^{-(n+1)t}\,x^n.$$

Q5. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} s_n(t)\,\mathrm{d}t$ converge et que $\displaystyle\int_0^{+\infty} s_n(t)\,\mathrm{d}t = \frac{x^n}{(n+1)^2}$.

Ici $x \in [-1\,;1]$ et $n \in \mathbb{N}$ sont fixés. On peut donc sortir le x^n de l'intégrale par simple linéarité et n'étudier que $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\,\mathrm{e}^{-(n+1)t}\,\mathrm{d}t$.

- D'abord $t \mapsto t\,\mathrm{e}^{-(n+1)t}$ est continue et positive sur $[0\,;+\infty[$ (en particulier pas de problème en 0).

Comme $n+1 > 0$, par croissances comparées, $t\,\mathrm{e}^{-(n+1)t} \underset{+\infty}{=} o(1/t^2)$.

Or $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ est intégrable en $+\infty$, donc par comparaison de fonctions positives l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} s_n(t)\,\mathrm{d}t$ est $\boxed{\text{convergente}}$.

- Pour le calcul, posons $\begin{cases} u = t \\ v' = \mathrm{e}^{-(n+1)t} \end{cases}$ et $\begin{cases} u' = 1 \\ v = \frac{-1}{n+1}\,\mathrm{e}^{-(n+1)t} \end{cases}$. On a $u(0)v(0) = 0$ et $u(t)v(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$ par croissances comparées.

Ainsi par $\boxed{\text{intégration par parties généralisées}}$, on a [1]

$$\int_0^{+\infty} t\,\mathrm{e}^{-(n+1)t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{1}{n+1}\,\mathrm{e}^{-(n+1)t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n+1}\left[\frac{-1}{n+1}\,\mathrm{e}^{-(n+1)t}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Enfin, en multipliant par la constante x^n, on obtient comme souhaité $\displaystyle\int_0^{+\infty} s_n(t)\,\mathrm{d}t = \frac{x^n}{(n+1)^2}$.

Q6. Montrer que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} s_n$ converge simplement sur $]0\,;+\infty[$ et que :

$$\forall t \in]0\,;+\infty[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} s_n(t) = f(t,x).$$

On rappelle que $x \in [-1\,;1]$ est fixé. Soit $t > 0$. On écrit $s_n(t) = t\,\mathrm{e}^{-(n+1)t}\,x^n = t\,\mathrm{e}^{-t}\big(x\,\mathrm{e}^{-t}\big)^n$. Comme $|e^{-t}x| < 1$ (car $t > 0$ et $|x| \leqslant 1$), la $\boxed{\text{série géométrique}}$ $\sum \big(x\,\mathrm{e}^{-t}\big)^n$ converge, *i.e.* la série de fonctions $\sum s_n$ converge simplement, et on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} s_n(t) = t\,\mathrm{e}^{-t} \sum_{n=0}^{+\infty} \big(x\,\mathrm{e}^{-t}\big)^n = t\,\mathrm{e}^{-t}\,\frac{1}{1 - x\,\mathrm{e}^{-t}}.$$

Enfin, en multipliant le numérateur et le dénominateur par e^t, on obtient $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} s_n(t) = \frac{t}{\mathrm{e}^t - x} = f(t,x)$.

1. Comme on a montré la convergence de la première intégrale, on peut bien écrire ces égalités.

Q7. Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{x^n}{n^2}$ converge et déduire des questions précédentes que $L(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n^2}$.

- Comme $x \in [-1\,;1]$, $\left|\dfrac{x^n}{n^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{n^2}$. Or $\sum \dfrac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente. Par comparaison, la série $\boxed{\sum \dfrac{x^n}{n^2} \text{ converge absolument donc converge}}$.
- Par définition de L et la question précédente, pour tout $x \in [-1\,;1]$, on a $L(x) = x\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t,x)\,\mathrm{d}t = x\int_0^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} s_n(t)\,\mathrm{d}t$. Appliquons $\boxed{\text{le théorème d'intégration terme à terme}}$.
  - D'après **Q5**, pour tout $n \in \mathbb{N}$, s_n est intégrable sur $]0\,;+\infty[$.
  - D'après **Q6**, la série de fonctions $\sum s_n$ converge simplement sur $]0\,;+\infty[$ vers $t \mapsto f(t,x)$ qui est continue par morceaux sur $]0\,;+\infty[$.
  - En reprenant les calculs de **Q5**, on a $\displaystyle\int_0^{+\infty} |s_n(t)|\,\mathrm{d}t = |x|^n \int_0^{+\infty} t\,\mathrm{e}^{-(n+1)t}\,\mathrm{d}t = \frac{|x|^n}{(n+1)^2}$. Or, d'après le début de cette question, la série $\sum \dfrac{|x|^n}{(n+1)^2}$ est convergente (simple glissement d'indice).

Ainsi, d'après le théorème d'intégration terme à terme, pour tout $x \in [-1\,;1]$, on a

$$L(x) = x\int_0^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} s_n(t)\,\mathrm{d}t = x\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty} s_n(t)\,\mathrm{d}t \overset{\mathbf{Q5}}{=} x\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{(n+1)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n^2}.$$

Q8. Montrer que pour tout $x \in [-1\,;1]$, on a $L(x) + L(-x) = \dfrac{1}{2}L(x^2)$.

Soit $x \in [-1\,;1]$. Comme $-x \in [-1\,;1]$, par somme de deux séries convergentes,

$$L(x) + L(-x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n(1+(-1)^n)}{n^2}.$$

Or si n est impair $1 + (-1)^n = 0$ alors que si n est pair, $1 + (-1)^n = 2$. D'où

$$L(x) + L(-x) = \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{x^{2p}\times 2}{(2p)^2} = \frac{2}{2^2}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{(x^2)^p}{p^2} = \boxed{\frac{1}{2}L(x^2)}.$$

Q9. Déduire des questions précédentes les valeurs de $L(1)$ et $L(-1)$.

- D'après **Q7**, on a directement $L(1) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \boxed{\frac{\pi^2}{6}}$ d'après le résultat donné au tout début de l'exercice.
- D'après la question précédente appliquée en $x = 1 \in [-1\,;1]$, on a $L(1) + L(-1) = \dfrac{1}{2}L(1)$, *i.e.* $L(-1) = \dfrac{-1}{2}L(1) = \boxed{\dfrac{-\pi^2}{12}}$.

Partie III - Une autre propriété

Dans cette partie, on considère la fonction $h\colon]0\,;1[\to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in]0\,;1[, \quad h(x) = L(x) + L(1-x) + \ln(x)\ln(1-x).$$

On rappelle qu'on a montré dans la partie précédente l'égalité $L(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$ valable pour tout $x \in [-1\,;1]$.

Q10. Justifier que la fonction L est dérivable sur $]-1, 1[$.

Appliquons le $\boxed{\text{théorème de dérivation terme à terme}}$ à la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} g_n$, où on a noté, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, $g_n \colon x \mapsto \frac{x^n}{n^2}$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, g_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1\,;1[$ en tant que fonction polynomiale. De plus, on a $g_n' \colon x \mapsto \frac{x^{n-1}}{n}$.
- D'après **Q6**, $\sum g_n$ converge simplement sur $[-1\,;1]$ donc a fortiori sur $]-1\,;1[$.
- Soit $0 \leqslant a < 1$ de façon que $[-a\,;a] \subset\,]-1\,;1[$.

  Pour tout $x \in [-a\,;a]$, on a $|g_n'(x)| = \frac{|x|^{n-1}}{n} \leqslant \frac{a^{n-1}}{n} \leqslant a^{n-1}$ (car $n \geqslant 1$), majoration indépendante de x. Par passage au sup, il vient $\|g_n'\|_{\infty,[-a;a]} \leqslant a^{n-1}$. Or la série géométrique $\sum a^{n-1}$ est convergente puisque $|a| < 1$. Ainsi la série de fonctions $\sum g_n'$ converge normalement donc absolument sur $[-a\,;a]$.

Par théorème de dérivation terme à terme, on obtient que $\boxed{L \text{ est dérivable sur }]-1\,;1[}$ et pour tout $x \in\,]-1\,;1[$, $L'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} g_n'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n}$.

Remarque : on peut aussi montrer que L est dérivable comme intégrale à paramètre (cf partie I) mais d'une part cela est moins agréable (rien que la dérivée de $x \mapsto f(t,x)$), et d'autre part on sera bien embêté pour la question suivante. Le rappel d'une expression de L en début de partie n'était pas là par hasard.

Q11. On **admet** que pour tout $x \in\,]-1\,;1[$, $\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$ (*ça sera un résultat de cours d'ici la fin du mois*).

Montrer que l'on a :

$$\forall x \in\,]-1\,;1[, \quad L'(x) = \begin{cases} -\dfrac{\ln(1-x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

D'après la question précédente, pour tout $x \in\,]-1\,;1[$, $L'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n}$.

$\boxed{\text{Si } x = 0, \text{ cette somme vaut } 1}$ (terme en x^0).

Si $x \neq 0$, on peut écrire, $L'(x) = \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = \boxed{\frac{-\ln(1-x)}{x}}$ d'après le résultat admis dans l'énoncé.

Q12. Montrer que la fonction h est constante sur $]0\,;1[$.

Sur $]0, 1[$, h est dérivable par somme, produit et composées de fonctions dérivables (**Q10** et fonctions usuelles).

Pour tout $x \in\,]0\,;1[$, par dérivation de composées et d'un produit, on a

$$\begin{aligned} h'(x) &= L'(x) - L'(1-x) + \frac{1}{x}\ln(1-x) + \ln(x)\frac{-1}{1-x} \\ &= -\frac{\ln(1-x)}{x} + \frac{\ln(1-(1-x))}{1-x} + \frac{\ln(1-x)}{x} - \frac{\ln(x)}{1-x} \\ &= 0. \end{aligned}$$

***Q11** pour $x \neq 0$*

Comme $]0\,;1[$ est un intervalle, on en déduit que $\boxed{\text{la fonction } h \text{ est constante sur }]0\,;1[}$.

Q13. Montrer que $h(x) = L(1)$ pour tout $x \in]0\,;1[$. En déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{2\,\mathrm{e}^t - 1}\,\mathrm{d}t$.

- Passons $\boxed{\text{à la limite lorsque } x \to 0^+}$ dans l'expression définissant h.

Par **Q4**, L est continue en 0 donc $L(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} L(0)$ et $L(1-x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} L(1)$.

Par ailleurs, $\ln(x)\ln(1-x) \underset{x\to 0^+}{\sim} -x\ln(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$ par croissances comparées.

Ainsi $h(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} L(1)$ et par constance de h (**Q12**), on obtient $\boxed{h(x) = L(1) \text{ pour tout } x \in]0\,;1[}$.

- D'une part, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{2\,\mathrm{e}^t - 1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{t}{\mathrm{e}^t - \frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t = L(1/2)$ par définition intégrale de L (cf partie I).

D'autre part, prenons donc $x = \frac{1}{2} \in]0\,;1[$ dans l'expression de h. D'après le point précédent, on a $L(1) = L(1/2) + L(1/2) + \ln(1/2)\ln(1/2)$, ou encore $L(1) = 2L(1/2) + (\ln 2)^2$.

D'après **Q9**, cela se réarrange en $L(1/2) = \dfrac{\pi^2}{12} - \dfrac{(\ln 2)^2}{2}$.

Finalement on obtient $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{2\,\mathrm{e}^t - 1}\,\mathrm{d}t = \boxed{\frac{\pi^2}{12} - \frac{(\ln 2)^2}{2}}$.